Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO
LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE
LI15 - SCIENTIFICO - SEZIONE AD INDIRIZZO SPORTIVO

(Testo valevole anche per le corrispondenti sperimentazioni internazionali e quadriennali)

Tema di: MATEMATICA e FISICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti.

PROBLEMA 1

Assegnate due costanti reali a e b (con $a > 0$), si consideri la funzione $q(t)$ così definita:

$$q(t) = at \cdot e^{bt}$$

1. A seconda dei possibili valori di a e b, discutere se nel grafico della funzione q è presente un punto di massimo o di minimo. Determinare i valori di a e b in corrispondenza dei quali il grafico della funzione $q(t)$, in un piano cartesiano di coordinate (t, y), ha un massimo nel punto $B\left(2, \frac{8}{e}\right)$.
2. Assumendo, d'ora in avanti, di avere $a = 4$ e $b = -\frac{1}{2}$, studiare la funzione
$$q(t) = 4t \cdot e^{-\frac{t}{2}}$$
verificando, in particolare, che si ha un flesso nel punto $F\left(4, \frac{16}{e^2}\right)$.
Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto F.

3. Supponendo che la funzione $q(t)$ rappresenti, per $t \geq 0$, la carica elettrica (misurata in C) che attraversa all'istante di tempo t (misurato in s) la sezione di un certo conduttore, determinare le dimensioni fisiche delle costanti a e b sopra indicate. Sempre assumendo $a = 4$ e $b = -\frac{1}{2}$, esprimere l'intensità di corrente $i(t)$ che fluisce nel conduttore all'istante t; determinare il valore massimo ed il valore minimo di tale corrente e a quale valore essa si assesta col trascorrere del tempo.

4. Indicando, per $t_0 \geq 0$, con $Q(t_0)$ la carica totale che attraversa la sezione del conduttore in un dato intervallo di tempo $[0, t_0]$, determinare a quale valore tende $Q(t_0)$ per $t_0 \to +\infty$.
Supponendo che la resistenza del conduttore sia $R = 3\Omega$, scrivere (senza poi effettuare il calcolo), un integrale che fornisca l'energia dissipata nell'intervallo di tempo $[0, t_0]$.

PROBLEMA 2

Una carica elettrica puntiforme $Q_1 = 4q$ (con q positivo) è fissata nell'origine O di un sistema di riferimento nel piano Oxy (dove x e y sono espressi in m). Una seconda carica elettrica puntiforme $Q_2 = q$ è vincolata a rimanere sulla retta r di equazione $y = 1$.

1. Supponendo che la carica Q_2 sia collocata nel punto $A(0,1)$, provare che esiste un unico punto P del piano nel quale il campo elettrostatico generato dalle cariche Q_1 e Q_2 è nullo. Individuare la posizione del punto P e discutere se una terza carica collocata in P si trova in equilibrio elettrostatico stabile oppure instabile.

2. Verificare che, se la carica Q_2 si trova nel punto della retta r avente ascissa x, l'energia potenziale elettrostatica del sistema costituito da Q_1 e Q_2 è data da
$$\mathcal{U}(x) = k\,\frac{4q^2}{\sqrt{1+x^2}}$$
dove k è una costante positiva (unità di misura: $\mathrm{N \cdot m^2/C^2}$).

3. Studiare la funzione $\mathcal{U}(x)$ per $x \in \mathbb{R}$, specificandone eventuali simmetrie, asintoti, massimi o minimi, flessi. Quali sono i coefficienti angolari delle tangenti nei punti di flesso?

4. A partire dal grafico della funzione $\mathcal{U}$, tracciare il grafico della funzione $\mathcal{U}'$, specificandone le eventuali proprietà di simmetria. Determinare il valore di $\int_{-m}^{m} \mathcal{U}'(x)\,dx$ (dove $m > 0$ indica l'ascissa del punto di minimo di $\mathcal{U}'$).

QUESITI

1. Determinare i valori di a e b in modo che la funzione $g: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$
$$g(x) = \begin{cases} 3 - a\,x^2 & \text{per } x \le 1 \\ \dfrac{b}{x-3} & \text{per } x > 1 \end{cases}$$
sia derivabile in tutto il suo dominio. Tracciare i grafici delle funzioni g e g'.

2. Sia $\mathcal{R}$ la regione piana compresa tra l'asse x e la curva di equazione $y = 2e^{1-|x|}$. Provare che, tra i rettangoli inscritti in $\mathcal{R}$ e aventi un lato sull'asse x, quello di area massima ha perimetro minimo ed è un quadrato.

3. Una scatola contiene 16 palline numerate da 1 a 16.
   - Se ne estraggono 3, una alla volta, rimettendo ogni volta nella scatola la pallina estratta. Qual è la probabilità che il primo numero estratto sia 10 e gli altri due minori di 10?
   - Se ne estraggono 5 contemporaneamente. Qual è la probabilità che il più grande dei numeri estratti sia uguale a 13?

4. Scrivere, giustificando la scelta effettuata, una funzione razionale $y = \frac{s(x)}{t(x)}$, dove $s(x)$ e $t(x)$ sono polinomi, tale che il grafico della funzione:
   - incontri l'asse x nei punti di ascissa -1 e 2 e sia ad esso tangente in quest'ultimo punto;
   - abbia asintoti verticali di equazioni $x = -3$ e $x = 1$;
   - passi per il punto $P(7, 10)$.

   Rappresentare, qualitativamente, il grafico della funzione trovata.

5. Si consideri la superficie sferica S di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z = 0$.
   - Dopo aver determinato le coordinate del centro e la misura del raggio, verificare che il piano π di equazione $3x - 2y + 6z + 1 = 0$ e la superficie S sono secanti.
   - Determinare il raggio della circonferenza ottenuta intersecando π e S.

6. Un punto materiale si muove di moto rettilineo, secondo la legge oraria espressa, per $t \geq 0$, da $x(t) = \frac{1}{9}t^2\left(\frac{1}{3}t + 2\right)$, dove $x(t)$ indica (in m) la posizione occupata dal punto all'istante t (in s). Si tratta di un moto uniformemente accelerato? Calcolare la velocità media nei primi 9 secondi di moto e determinare l'istante in cui il punto si muove a questa velocità.

7. Una sfera di massa m urta centralmente a velocità v una seconda sfera, avente massa $3m$ ed inizialmente ferma.
   a. Stabilire le velocità delle due sfere dopo l'urto, nell'ipotesi che tale urto sia perfettamente elastico.
   b. Stabilire le velocità delle due sfere dopo l'urto, nell'ipotesi che esso sia completamente anelastico. Esprimere, in questo caso, il valore dell'energia dissipata.

8. Un campo magnetico, la cui intensità varia secondo la legge $B(t) = B_0(2 + \text{sen}(\omega t))$, dove t indica il tempo, attraversa perpendicolarmente un circuito quadrato di lato l. Detta R la resistenza presente nel circuito, determinare la forza elettromotrice e l'intensità di corrente indotte nel circuito all'istante t. Specificare le unità di misura di tutte le grandezze coinvolte.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 350 Art. 18 comma 8).
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

PROBLEMA 1

Assegnate due costanti reali a e b (con $a > 0$), si consideri la funzione $q(t)$ così definita:

$$q(t) = at \cdot e^{bt}$$

1. A seconda dei possibili valori di a e b, discutere se nel grafico della funzione q è presente un punto di massimo o di minimo. Determinare i valori di a e b in corrispondenza dei quali il grafico della funzione $q(t)$, in un piano cartesiano di coordinate (t, y), ha un massimo nel punto $B\left(2, \frac{8}{e}\right)$.
2. Assumendo, d'ora in avanti, di avere $a = 4$ e $b = -\frac{1}{2}$, studiare la funzione

$$q(t) = 4t \cdot e^{-\frac{t}{2}}$$

   verificando, in particolare, che si ha un flesso nel punto $F\left(4, \frac{16}{e^2}\right)$.
   Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto F.

3. Supponendo che la funzione $q(t)$ rappresenti, per $t \geq 0$, la carica elettrica (misurata in C) che attraversa all'istante di tempo t (misurato in s) la sezione di un certo conduttore, determinare le dimensioni fisiche delle costanti a e b sopra indicate. Sempre assumendo $a = 4$ e $b = -\frac{1}{2}$, esprimere l'intensità di corrente $i(t)$ che fluisce nel conduttore all'istante t; determinare il valore massimo ed il valore minimo di tale corrente e a quale valore essa si assesta col trascorrere del tempo.

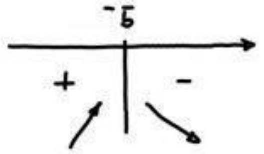
4. Indicando, per $t_0 \geq 0$, con $Q(t_0)$ la carica totale che attraversa la sezione del conduttore in un dato intervallo di tempo $[0, t_0]$, determinare a quale valore tende $Q(t_0)$ per $t_0 \to +\infty$.
   Supponendo che la resistenza del conduttore sia $R = 3\Omega$, scrivere (senza poi effettuare il calcolo), un integrale che fornisca l'energia dissipata nell'intervallo di tempo $[0, t_0]$.

1 $\quad q'(t) = a\left(1 \cdot e^{bt} + t \cdot e^{bt} \cdot b\right) = a \cdot e^{bt}(1 + b \cdot t)$

$q'(t) \geq 0 \iff a \cdot e^{bt} \cdot (1+bt) \geq 0 \qquad F_1: a \cdot e^{bt} \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

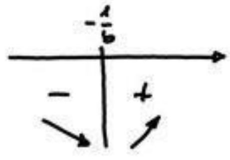
$F_2: 1+bt \geq 0 \qquad bt \geq -1 \begin{cases} \boxed{b<0} & t \leq -\frac{1}{b} \quad t \leq \left|\frac{1}{b}\right| \\ \boxed{b>0} & t \geq -\frac{1}{b} \end{cases}$

Per $b<0$:



MAX in $t = -\frac{1}{b}$

Per $b>0$:



MIN in $t = -\frac{1}{b}$

MAX IN $B\left(2; \frac{8}{e}\right) \iff \begin{cases} -\frac{1}{b} = 2 \\ q(2) = \frac{8}{e} \end{cases} \quad \begin{cases} b = -\frac{1}{2} \\ a \cdot 2 \cdot e^{b \cdot 2} = \frac{8}{e} \end{cases} \quad 2a \cdot e^{-1} = 8 \cdot e^{-1} \quad \begin{cases} b = -\frac{1}{2} \\ a = 4 \end{cases}$

② $q(t) = 4 \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{2}t}$

DOMINIO: $D = \{\forall t \in \mathbb{R}\}$

INT. ASSI: $t = 0 \rightarrow q(0) = 4 \cdot 0 \cdot e^0 = 0$ $\quad q(t) = 0 \Leftrightarrow 4t \cdot e^{-\frac{1}{2}t} = 0 \quad t = 0$

SEGNO: $4t \cdot e^{-\frac{1}{2}t} \geq 0 \Leftrightarrow$ $F_1: 4t \geq 0 \quad t \geq 0$

$F_2: e^{-\frac{1}{2}t} \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

	$t<0$	0	$t>0$
F_1	$-$	•	$+$
F_2	$+$		$+$
	$-$		$+$

$y \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

LIMITI E ASINTOTI: $\lim_{t \to +\infty} 4t \cdot e^{-\frac{1}{2}t} = +\infty \cdot 0$ (F.I.) $= \lim_{t \to +\infty} \frac{4t}{e^{t/2}} = \frac{+\infty}{+\infty} = 0$ ← PREVALE

As. Orizz. Destro: $y = 0$

$\lim_{t \to -\infty} 4t \cdot e^{-\frac{1}{2}t} = -\infty \cdot (+\infty) = -\infty$ $\quad$ No As. Or. Sx. ; As. Obl.? : $m = \lim_{t \to -\infty} \frac{4 \cdot \cancel{t} \cdot e^{-t/2}}{\cancel{t}} = +\infty$

No As. Obl. Sx.

MAX. E MIN. RELATIVI (DERIVATA PRIMA): come già calcolato in ①:

$q'(t) = 4 \cdot e^{-t/2}\left(1 - \frac{1}{2}t\right)$ $\quad$ ed inoltre:

$t<2$	2	$t>2$
$+$ ↗		$-$ ↘

FLESSI E CONCAVITÀ (DERIVATA SECONDA):

$$q''(t) = \overset{2}{\cancel{4}} e^{-t/2} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)\left(1 - \frac{1}{2}t\right) + \overset{2}{\cancel{4}} \cdot e^{-t/2}\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right) = 2\, e^{-t/2} \cdot \left(-1 + \frac{1}{2}t - 1\right) =$$

$$= \cancel{2} \cdot e^{-t/2} \cdot \frac{-4+t}{\cancel{2}} = (t-4) \cdot e^{-t/2}$$

$q''(t) \geq 0 \Leftrightarrow (t-4) \cdot e^{-t/2} \geq 0$ $\quad F_1: t \geq 4$ $\quad F_2: \forall t \in \mathbb{R}$

	$t<4$	4	$t>4$
F_1	$-$	•	$+$
F_2	$+$		$+$
	$-$		$+$
	$\cap$		$\cup$

Si ha un flesso in $t = 4$; $q(4) = 16 \cdot e^{-2} = \frac{16}{e^2}$

TANGENTE IN $F(4; 16/e^2)$:

$m = q'(4) = 4 \cdot e^{-4/2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot 4\right) = -\frac{4}{e^2}$

equ.: $y - q(4) = m \cdot (x-4)$ $\quad y - \frac{16}{e^2} = -\frac{4}{e^2}(x-4)$ $\quad y = -\frac{4}{e^2}x + \frac{16}{e^2} + \frac{16}{e^2}$

$\boxed{y = -\frac{4}{e^2}x + \frac{32}{e^2}}$ $\quad$ In forma implicita: $4x + e^2 y - 32 = 0$

(3) Poichè $[t] = s$ e $[q(t)] = C$, essendo: $[q(t)] = [a]\cdot[t]\cdot 1$,

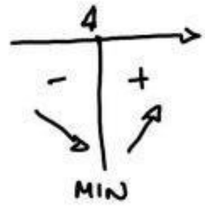
$[a] = \dfrac{[q(t)]}{[t]} = \dfrac{C}{s}$. Dovendo inoltre essere $[b]\cdot[t] = 1$ (l'esponente di e deve essere adimensionale), $[b] = \dfrac{1}{[t]} = \dfrac{1}{s} = Hz$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = q'(t) = 2\cdot e^{-t/2}(2-t)$$

I valori max/min della corrente si possono ricavare studiando $i'(t)$:

$$i'(t) = \cancel{2}\cdot e^{-t/2}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)\cdot(2-t) + 2e^{-t/2}\cdot(-1) = e^{-t/2}(-2+t-2) = e^{-t/2}(t-4)$$

$$i'(t) \geq 0 \iff e^{-t/2}(t-4) \geq 0 \qquad t-4 \geq 0 \qquad t \geq 4$$



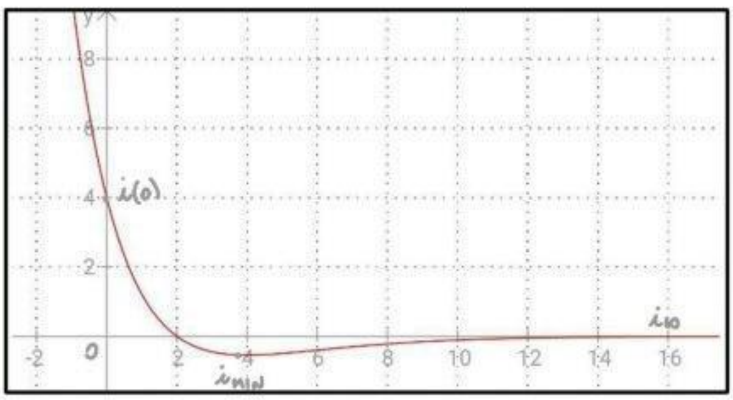
Per $t = 4\,s$ si ha un minimo: $i(4) = i_{min} = -\dfrac{4}{e^2}$ A

Il valore max. si può avere per $t = 0$ (se per $t \to +\infty$ il valore cui tende la corrente risultasse minore):

$$i(0) = 2\cdot e^0(2-0) = 4\text{ A}$$

$$i_\infty = \lim_{t\to+\infty} 2\cdot e^{-t/2}\cdot(2-t) = 0\cdot\infty\ (F.I.) = \lim_{t\to+\infty} 2\cdot\frac{2-t}{e^{t/2}} = \frac{-\infty}{\underbrace{(+\infty)}_{\text{PREVALE}}} = 0\text{ A}$$

Poichè $i(0) > i_\infty$, il valore max. della corrente è $i(0) = 4$ A. Il valore "di regime" (per $t \to +\infty$) è, invece, $i_\infty = 0$ A.



4

$$Q(t_0) = \int_0^{t_0} q(t)\,dt = \int_0^{t_0} 4t\cdot e^{-t/2}\,dt =$$

INTEGRAZIONE PER PARTI:

$f = t \qquad f' = 1$

$g' = e^{-t/2} \qquad g = \int e^{-t/2}\,dt =$

$= -2\cdot\int -\frac{1}{2} e^{-t/2}\,dt = -2\cdot e^{-t/2}$

$$= 4\cdot\left[(-2)t\cdot e^{-t/2} - \int 1\cdot(-2)e^{-t/2}\,dt\right]_0^{t_0} =$$

$$= 4\left[-2te^{-t/2} + 2\cdot\int e^{-t/2}\,dt\right]_0^{t_0} = 4\cdot\left[-2te^{-t/2} + 2\cdot(-2)e^{-t/2}\right]_0^{t_0} =$$

$$= 4\cdot\left[-2t_0 e^{-t_0/2} - 4e^{-t_0/2} - \left(-2\cdot 0\cdot e^0 - 4\cdot e^0\right)\right] = 4\left(-2e^{-t_0/2}(t_0+2) + 4\right) =$$

$$= 8\cdot\left[2 - e^{-t_0/2}\cdot(t_0+2)\right]$$

$$Q_\infty = \lim_{t\to+\infty} 8\cdot\left[2 - e^{-t_0/2}\cdot(t_0+2)\right] = 16 - 8\cdot 0\cdot\infty \quad (\text{F.I.}) =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} 8\cdot\left(2 - \frac{t_0+2}{e^{-t_0/2}}\right) = 8\cdot\left(2 - \frac{\infty}{\infty}\right) = 8\cdot(2-0) = 16\ C$$

PREVALE

<u>POTENZA DISSIPATA</u>: $P = R\cdot i^2 \rightarrow P(t) = R\cdot\left[2\cdot e^{-t/2}\cdot(2-t)\right]^2$

<u>ENERGIA DISSIPATA</u>: $E = \int_0^{t_0} P(t)\,dt = \int_0^{t_0} R\cdot 4\cdot e^{-t}(2-t)^2\,dt = 4R\int_0 e^{-t}(2-t)^2\,dt$

Sebbene non richiesto, è possibile risolvere l'integrale usando il metodo di integraz. per parti: $f = (2-t)^2 \rightarrow f' = 2\cdot(2-t)\cdot(-1) = 2(t-2)$

$g' = e^{-t} \rightarrow g = \int e^{-t}\,dt = -e^{-t}$

$$E = 4R\cdot\left[-(2-t)^2\cdot e^{-t} + \int 2(t-2)e^{-t}\,dt\right]_0^{t_0} =$$

$$\begin{cases} f = t-2 & f' = 1 \\ g' = e^{-t} & g = -e^{-t} \end{cases}$$

$$= 4R\left[-(2-t)^2 e^{-t} + 2\cdot(t-2)\cdot(-e^{-t}) - 2\int 1\cdot(-e^{-t})\,dt\right]_0^{t_0} =$$

$$= 4R\left[-(t-2)^2 e^{-t} - 2(t-2)e^{-t} - 2\cdot e^{-t}\right]_0^{t_0} = 4R\cdot\left[e^{-t}\left(-t^2+4t-4-2t+4-2\right)\right]_0^{t_0} =$$

$$= 4R\left[e^{-t_0}\left(-t_0^2+2t_0-2\right) - e^0\left(0^2+2\cdot 0-2\right)\right] = 4R\cdot e^{-t_0}\left(-t_0^2+2t_0-2\right) + 8R$$

PROBLEMA 2

Una carica elettrica puntiforme $Q_1 = 4q$ (con q positivo) è fissata nell'origine O di un sistema di riferimento nel piano Oxy (dove x e y sono espressi in m). Una seconda carica elettrica puntiforme $Q_2 = q$ è vincolata a rimanere sulla retta r di equazione $y = 1$.

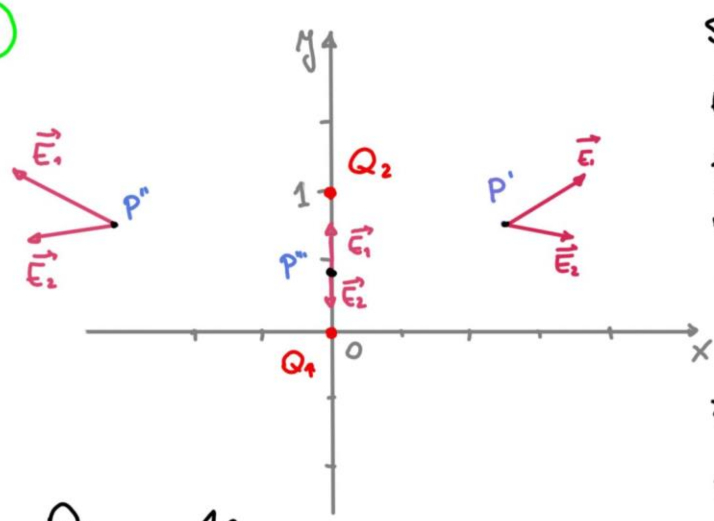
1. Supponendo che la carica Q_2 sia collocata nel punto $A(0, 1)$, provare che esiste un unico punto P del piano nel quale il campo elettrostatico generato dalle cariche Q_1 e Q_2 è nullo. Individuare la posizione del punto P e discutere se una terza carica collocata in P si trova in equilibrio elettrostatico stabile oppure instabile.

2. Verificare che, se la carica Q_2 si trova nel punto della retta r avente ascissa x, l'energia potenziale elettrostatica del sistema costituito da Q_1 e Q_2 è data da
$$\mathcal{U}(x) = k\,\frac{4q^2}{\sqrt{1+x^2}}$$
dove k è una costante positiva (unità di misura: $\mathrm{N \cdot m^2/C^2}$).

3. Studiare la funzione $\mathcal{U}(x)$ per $x \in \mathbb{R}$, specificandone eventuali simmetrie, asintoti, massimi o minimi, flessi. Quali sono i coefficienti angolari delle tangenti nei punti di flesso?

4. A partire dal grafico della funzione $\mathcal{U}$, tracciare il grafico della funzione $\mathcal{U}'$, specificandone le eventuali proprietà di simmetria. Determinare il valore di $\int_{-m}^{m} \mathcal{U}'(x)\,dx$ (dove $m > 0$ indica l'ascissa del punto di minimo di $\mathcal{U}'$).

1



Sia $P(x;y)$ un generico punto del piano. È evidente dal disegno che solo qualche punto fra Q_1 e Q_2 può avere un campo nullo, essendo concordi sempre le componenti orizzontali (cfr. P' e P''). Per un punto sull'asse y (P'''), $x=0$, per cui:

$$\overline{PQ_2} = |y_{P'''} - y_{Q_2}| = 1-y \qquad \text{con } 0<y<1.$$
$$\overline{PQ_1} = |y_{P'''} - y_{Q_1}| = y$$

$$E_1 = k \cdot \frac{Q_1}{\overline{PQ_1}^2} = k \cdot \frac{4q}{(1-y)^2}$$

$$E_2 = k \cdot \frac{Q_2}{\overline{PQ_1}} = k \cdot \frac{q}{y^2}$$

Affinchè il campo sia nullo : $E_1 = E_2$

$$\cancel{k} \cdot \frac{\cancel{q}}{y^2} = \cancel{k} \cdot \frac{4\cancel{q}}{(1-y)^2}$$

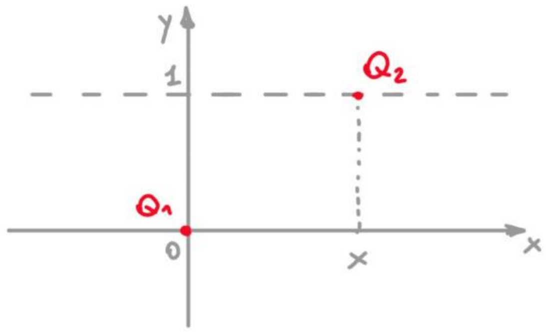
Invertendo: $y^2 = \dfrac{1+y^2-2y}{4}$

$$3y^2 + 2y - 1 = 0$$

$$y_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{3} = \frac{-1 \pm 2}{3} = \begin{cases} 1/3 \\ \cancel{-1} \end{cases}$$

Il campo elettrico è nullo nel punto $P\left(0; \frac{1}{3}\right)$.

(2)



L'En. Potenziale Elettrica di un sistema di due cariche è data da:

$$\mathcal{U} = k \cdot \frac{Q_1 Q_2}{\overline{Q_1 Q_2}} = k \cdot \frac{4q \cdot q}{\sqrt{(x-0)^2+(1-0)^2}}$$

ovvero: $\mathcal{U}(x) = k \dfrac{4q^2}{\sqrt{x^2+1}}$, c.v.d. ■

(3) $\mathcal{U}(x) = \dfrac{4kq^2}{\sqrt{x^2+1}}$

DOMINIO : $x^2+1>0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

STUDIO DEL SEGNO : $\mathcal{U}(x)>0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

INT. ASSE y $(x=0)$: $\mathcal{U}(0) = 4kq^2$

SIMMETRIE : $\mathcal{U}(-x) = \dfrac{4kq^2}{\sqrt{(-x)^2+1}} = \dfrac{4kq^2}{\sqrt{x^2+1}} = \mathcal{U}(x)$

↳ FUNZIONE PARI

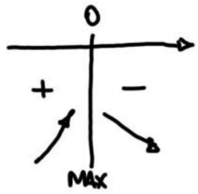
LIMITI E ASINTOTI :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4kq^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{4kq^2}{\infty} = 0 \qquad y=0 : \text{AS. ORIZZ.}$$

DERIVATA : $\mathcal{U}'(x) = 4kq^2 \cdot D\left[(x^2+1)^{-1/2}\right] = \cancel{4}^{\,2}kq^2 \cdot \left(-\dfrac{1}{\cancel{2}}\right) \cdot (x^2+1)^{-\frac{3}{2}} \cdot (2x) = -\dfrac{4kq^2 \cdot x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$

$\mathbb{D}' = \mathbb{R}$

$\mathcal{U}'(x) \geq 0 \iff -4kq^2 \cdot x \geq 0 \qquad x \leq 0$



MAX in $x=0$

DERIVATA SECONDA :

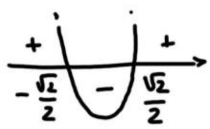
$$\mathcal{U}''(x) = \frac{-4kq^2 \cdot \sqrt{(x^2+1)^3} + 4kq^2 \cdot x \cdot D\left[(x^2+1)^{3/2}\right]}{\left(\sqrt{(x^2+1)^3}\right)^2} = 4kq^2 \cdot \frac{-\sqrt{(x^2+1)^3} + x \cdot \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \sqrt{x^2+1} \cdot \cancel{2}x}{(x^2+1)^3} =$$

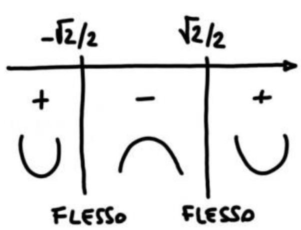
$$= 4kq^2 \cdot \frac{-(x^2+1)\sqrt{x^2+1} + 3x^2\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)^3} = 4kq^2 \cdot \frac{\sqrt{x^2+1} \cdot (-x^2-1+3x^2)}{(x^2+1)^3} =$$

$$= 4kq^2 \cdot \sqrt{x^2+1} \cdot \frac{2x^2-1}{(x^2+1)^3}$$

$\mathcal{U}''(x) \geq 0 \iff 2x^2-1 \geq 0$

↳ $x_{1/2} = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$





TANGENTI NEI PUNTI DI FLESSO $(x = \pm\sqrt{2}/2)$: $\mathcal{U}'(\sqrt{2}/2) = -4kq^2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{\left(\frac{2}{4}+1\right)^3}} = \dfrac{8\sqrt{3}}{9}kq^2$

$\mathcal{U}'(-\sqrt{2}/2) = \ldots = -\dfrac{8\sqrt{3}}{9}kq^2$

$$\mathcal{U}(\sqrt{2}/2) = k \cdot \frac{4q^2}{\sqrt{\frac{2}{4}+1}} = 4kq^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = 4kq^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{6}\,kq^2 = \mathcal{U}(-\sqrt{2}/2)$$

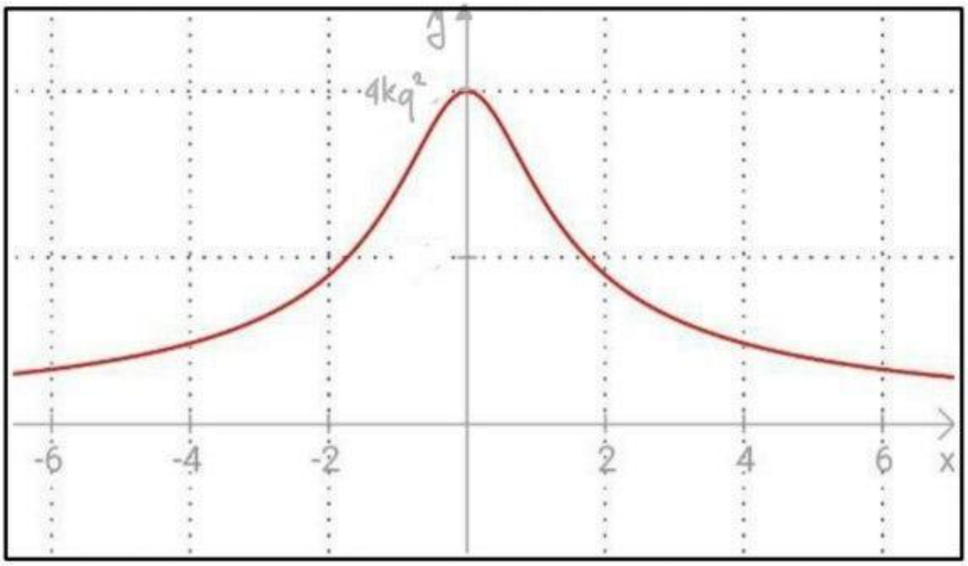
TANG. IN $x = \sqrt{2}/2$: $y - \mathcal{U}(\sqrt{2}/2) = \mathcal{U}'(\sqrt{2}/2) \cdot (x - \sqrt{2}/2)$ $\quad y - \frac{4}{3}\sqrt{6}\,kq^2 = \frac{8\sqrt{3}}{9}kq^2\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$y = \frac{8\sqrt{3}}{9}kq^2 \cdot x - \frac{4\sqrt{6}}{9}kq^2 + \frac{4}{3}\sqrt{6}\,kq^2 \qquad \boxed{y = \frac{8\sqrt{3}}{9}kq^2 \cdot x + \frac{8\sqrt{6}}{9}kq^2}$$

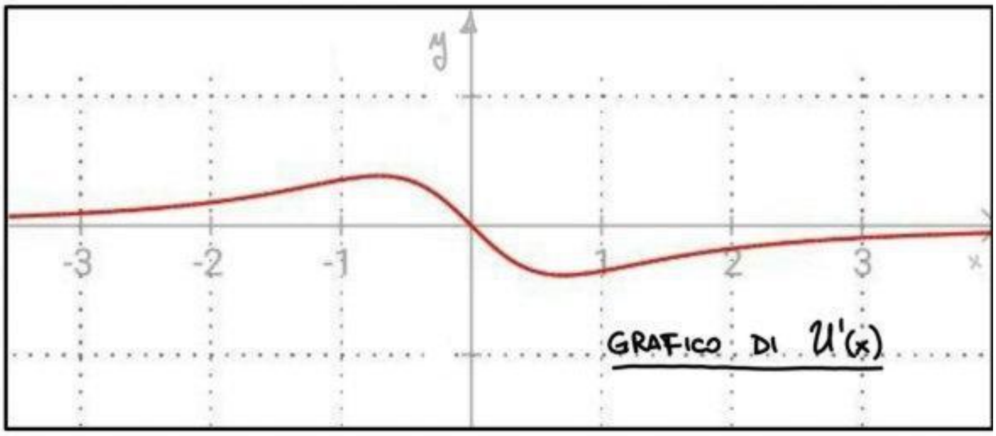
TANG. IN $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$: $y - \mathcal{U}(-\sqrt{2}/2) = \mathcal{U}'(-\sqrt{2}/2) \cdot (x + \sqrt{2}/2)$ $\quad y - \frac{4}{3}\sqrt{6}\,kq^2 = -\frac{8\sqrt{3}}{9}kq^2\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$y = -\frac{8\sqrt{3}}{9}kq^2 \cdot x - \frac{4\sqrt{6}}{9}kq^2 + \frac{4}{3}\sqrt{6}\,kq^2 \qquad \boxed{y = -\frac{8\sqrt{3}}{9}kq^2 \cdot x + \frac{8\sqrt{6}}{9}kq^2}$$

GRAFICO DI $\mathcal{U}(x)$:



(4) Sebbene sia possibile ricavare il grafico di $\mathcal{U}'(x)$ dal suo studio di funzione (avendone l'espressione analitica), è possibile dedurne i tratti salienti dal grafico di $\mathcal{U}(x)$. Il fatto che quest'ultima non abbia punti di non derivabilità ci garantisce che il dominio di $\mathcal{U}'(x)$ sia $\mathbb{R}$. Poiché $\mathcal{U}(x)$ è pari, $\mathcal{U}'(x)$ sarà una funz. dispari. Il max di $\mathcal{U}(x)$ in $x=0$ ci dice che in quell'ascissa $\mathcal{U}'(x)$ ha uno zero. Nei tratti a concavità verso l'alto di $\mathcal{U}(x)$, la $\mathcal{U}'(x)$ è crescente. Poiché inoltre la pendenza di $\mathcal{U}(x)$ per $x \to \infty$ è sempre minore (visto il suo asintoto orizz.), $\mathcal{U}'(x)$ avrà come as. orizz. la retta $y=0$. I max/min. di $\mathcal{U}'(x)$ sono inoltre in $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, flessi di $\mathcal{U}(x)$.



Riguardo l'integrale richiesto, poiché $\mathcal{U}'(x)$ è una funz. dispari, $\int_{-A}^{A} \mathcal{U}'(x)\,dx = 0$ $\forall A \in \mathbb{R}$. Evidentemente è nullo anche quello proposto nel testo.

1. Determinare i valori di a e b in modo che la funzione $g\colon \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} 3 - a\,x^2 & \text{per } x \le 1 \\ \dfrac{b}{x-3} & \text{per } x > 1 \end{cases}$$

sia derivabile in tutto il suo dominio. Tracciare i grafici delle funzioni g e g'.

DOMINIO (CONTINUITÀ)

$D_{g_1} = \mathbb{R}$

$D_{g_2} = \mathbb{R} - \{3\}$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 1^-} (3 - ax^2) = 3 - a\cdot 1^2 = 3 - a \\ &\lim_{x\to 1^+} \frac{b}{x-3} = \frac{b}{1-3} = -\frac{b}{2} \end{aligned}\right\}$$

CONTINUITÀ IN $x=1 \iff$ $3 - a = -\dfrac{b}{2} \to \boxed{b = 2a - 6}$

DERIVATA (DERIVABILITÀ)

$$g'(x) = \begin{cases} -2ax & x < 1 \\ -\dfrac{b}{(x-3)^2} & x > 1 \end{cases}$$

$D_{g_1'} = \mathbb{R}$

$D_{g_2'} = \mathbb{R} - \{3\}$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 1^-} (-2ax) = -2a\cdot 1 = -2a \\ &\lim_{x\to 1^+} \left[-\frac{b}{(x-3)^2}\right] = -\frac{b}{(1-3)^2} = -\frac{b}{4} \end{aligned}\right\}$$

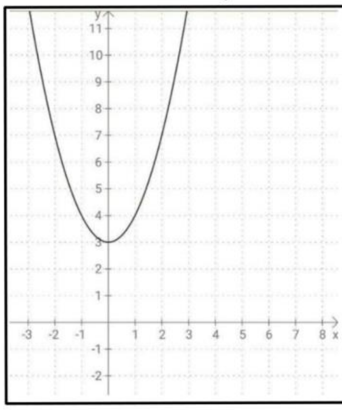
DERIVABILITÀ IN $x=1 \iff$ $-2a = -\dfrac{b}{4} \to \boxed{b = 8a}$

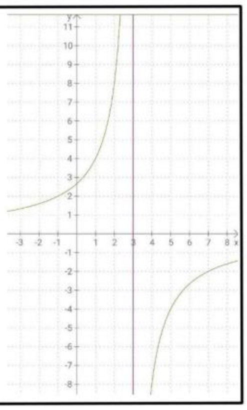
CONTINUITÀ E DERIVABILITÀ $\iff$ $\begin{cases} b = 2a - 6 \\ b = 8a \end{cases}$ $\quad\begin{cases} 8a - 2a = -6 \\ b = 8a \end{cases}$ $\quad\begin{cases} 6a = -6 \\ b = 8a \end{cases}$ $\quad\begin{cases} a = -1 \\ b = -8 \end{cases}$

$$\boxed{g(x) = \begin{cases} 3 + x^2 & x \le 1 \\ \dfrac{-8}{x-3} & x > 1 \end{cases}}$$

GRAFICO DI $g(x)$:

- $g_1(x)$ è una PARABOLA di vertice $V(0;3)$ e passante per $(1;4)$
- $g_2(x)$ è un' IPERBOLE EQUILATERA (FUNZ. OMOGRAFICA) di asintoti $y=0$ e $x=3$. Passa per $(1;4)$.





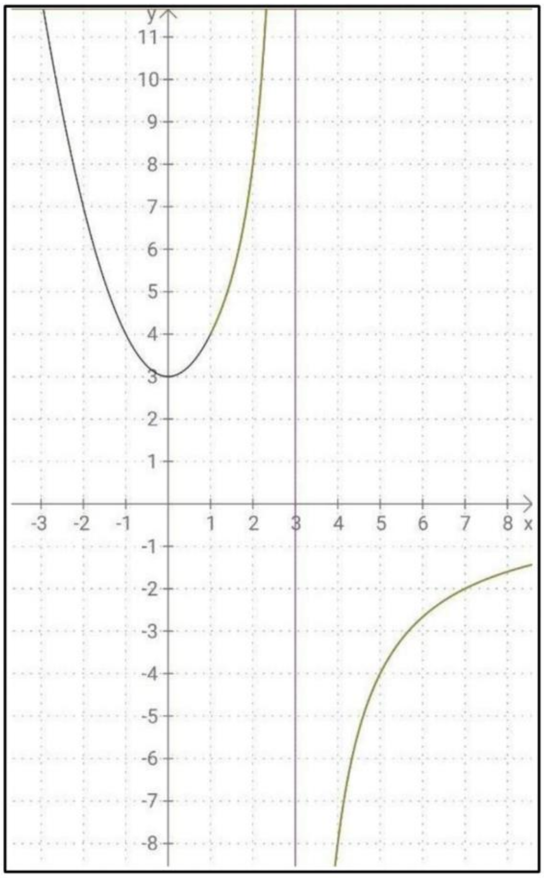


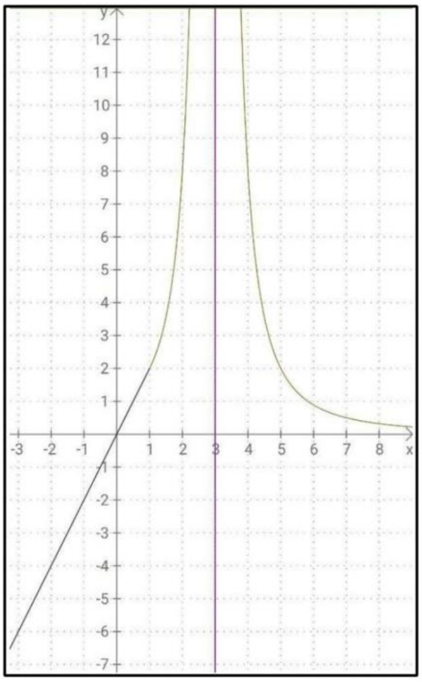
GRAFICO DI $g'(x)$

$$g'(x)=\begin{cases}2x & x\le 1\\[4pt] \dfrac{8}{(x-3)^2} & x>1\end{cases}$$

$g_1'(x)$ è una RETTA

x	0	1
y	0	2

$g_2'(x)$ è una FUNZ. RAZIONALE FRATTA sempre positiva, con dominio $\mathbb{D}=\mathbb{R}-\{3\}$, tendente a 0 per $x\to\infty$ e passante per $(0;8/9)$. Sarebbe facile dimostrare che è simmetrica rispetto ad $x=3$.



2. Sia $\mathcal{R}$ la regione piana compresa tra l'asse x e la curva di equazione $y=2e^{1-|x|}$. Provare che, tra i rettangoli inscritti in $\mathcal{R}$ e aventi un lato sull'asse x, quello di area massima ha perimetro minimo ed è un quadrato.

$$y=2\cdot e^{1-|x|}=\begin{cases}2\cdot e^{1-x} & x\ge 0\\ 2\cdot e^{1+x} & x<0\end{cases}$$

Sia P un punto di ascissa positiva x appartenente alla curva $y=f(x)$. La sua ordinata è pari a $2\cdot e^{1-x}$.
Le sue proiezioni sugli assi cartesiani siano K ed H (su x ed y rispettivamente).
L'Area del rettangolo sotteso alla curva vale $2\cdot\overline{PH}\cdot\overline{PK}$. Il perimetro $4\overline{PH}+2\overline{PK}$.

$P(x;2\cdot e^{1-x})$

$H(0;2e^{1-x})$ $\quad K(x;0)$

$\overline{PH}=|x_P-x_H|=x$

$\overline{PK}=|y_P-y_K|=2\cdot e^{1-x}$

$\mathcal{A}_R=2\cdot\overline{PH}\cdot\overline{PK}=4x\cdot e^{1-x}$

$2p_R=4\overline{PH}+2\overline{PK}=4(1-e^{1-x})$

- $\mathcal{A}_R=\mathcal{A}_{MAX}\iff \mathcal{A}_R'(x)=0$

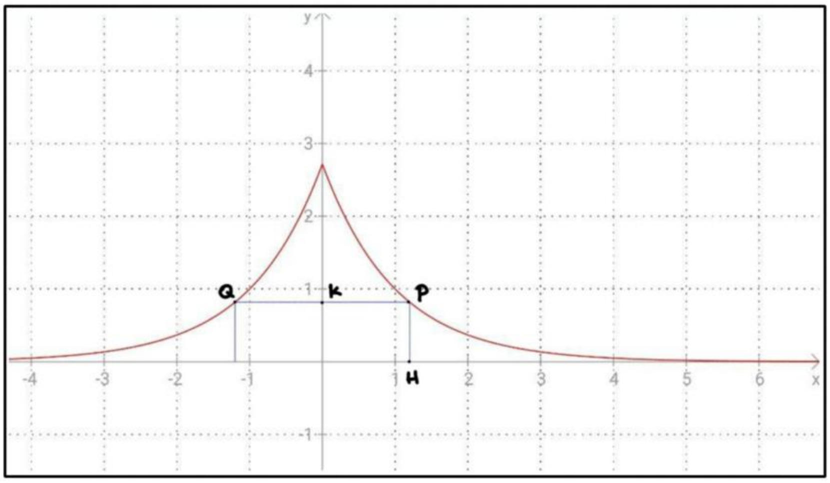
$\mathcal{A}_R'=4\cdot e^{1-x}-4xe^{1-x}=4e^{1-x}(1-x)$

$\mathcal{A}_R'=0\iff \boxed{x=1}$

- $2p_R=2p_{max}\iff 2p_R'=0$

$2p_R'=4(1-e^{1-x})$

$2p_R'=0\iff e^{1-x}=1\ ;\ 1-x=0\iff \boxed{x=1}$



In entrambi i casi, $P(1;2)\rightsquigarrow \overline{PQ}=\overline{PK}=2$

3. Una scatola contiene 16 palline numerate da 1 a 16.
   - Se ne estraggono 3, una alla volta, rimettendo ogni volta nella scatola la pallina estratta. Qual è la probabilità che il primo numero estratto sia 10 e gli altri due minori di 10?
   - Se ne estraggono 5 contemporaneamente. Qual è la probabilità che il più grande dei numeri estratti sia uguale a 13?

ⓐ E_1 : ESTRAZIONE DEL NUM. 10

E_2 : ESTRAZIONE DI UN NUM. DA 1 A 9

$$P(E_1) = \frac{1}{16} \qquad P(E_2) = \frac{9}{16}$$

POICHÉ SONO EVENTI INDIPENDENTI, LA PROBABILITÀ CHE SI VERIFICHINO TUTTI È PARI AL PRODOTTO DELLE PROB. DEI SINGOLI EVENTI:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_2) = \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{9}{16}\right)^2 = \frac{81}{4096} \simeq 0{,}020 = 2{,}0\,\%$$

ⓑ POSSIAMO PENSARE LE ESTRAZIONI COME SE FOSSERO CONSECUTIVE, MA SENZA REIMBUSSOLAMENTO. UN EVENTO FAVOREVOLE È QUELLO DI ESTRARRE IL 13 COME PRIMO $\left(P = \frac{1}{16}\right)$ E POI ALTRE 4 BIGLIE CON NUM. ≤ 12 (PER CIASCUN EVENTO, LE PROBABILITÀ SONO $\frac{12}{15}, \frac{11}{14}, \frac{10}{13}, \frac{9}{12}$). LA PROBABILITÀ CHE SI VERIFICHI QUESTO EVENTO È PARI A:

$$P = \frac{1}{16} \cdot \frac{12}{15} \cdot \frac{11}{14} \cdot \frac{10}{13} \cdot \frac{9}{12} = \frac{33}{1456}$$

UN ALTRO CASO FAVOREVOLE È QUELLO IN CUI ESCA UN NUM. ≤ 12 COME PRIMO $(P = 12/16)$, POI IL 13 $(P = 1/15)$ E POI ALTRE 3 BIGLIE ≤ 12 $(P = 11/14, 10/13, 9/12)$. LA PROBABILITÀ DI QUESTO EVENTO È:

$$P = \frac{12}{16} \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{11}{14} \cdot \frac{10}{13} \cdot \frac{9}{12} = \frac{33}{1456}$$

È IMMEDIATO CONVINCERSI CHE GLI EVENTI (FAVOREVOLI) IN CUI IL 13 ESCA PER TERZO, QUARTO O QUINTO ABBIANO ANCORA LA STESSA PROB.

LA PROBABILITÀ CHE SI VERIFICHI UNO DEGLI EVENTI PRECEDENTI, È QUINDI PARI A:

$$P = 5 \cdot \frac{33}{1456} = \frac{165}{1456} \simeq 0{,}113 = 11{,}3\,\%$$

4. Scrivere, giustificando la scelta effettuata, una funzione razionale $y = \frac{s(x)}{t(x)}$, dove $s(x)$ e $t(x)$ sono polinomi, tale che il grafico della funzione:

- incontri l'asse x nei punti di ascissa -1 e 2 e sia ad esso tangente in quest'ultimo punto;
- abbia asintoti verticali di equazioni $x = -3$ e $x = 1$;
- passi per il punto $P(7, 10)$.

Rappresentare, qualitativamente, il grafico della funzione trovata.

AFFINCHÉ LA FUNZ. INCONTRI L'ASSE x NEI PUNTI DI ASCISSA -1 E 2, DEVE ESSERE $f(-1) = f(2) = 0$, OVVERO $\frac{s(x)}{t(x)} = 0$ PER $x = -1 \vee x = 2$. AFFINCHÉ LA FRAZIONE ABBIA QUEGLI ZERI, SI PUÒ PRELIMINARMENTE PORRE

$$s(x) = (x+1)(x-2) \cdot s_2(x).$$

AFFINCHÉ ABBIA GLI ASINTOTI VERTICALI RICHIESTI, È NECESSARIO CHE:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to -3} f(x) = \infty$$

E QUESTO ACCADE SE IL DENOMINATORE SI ANNULLA IN CORRISPONDENZA DEI DUE VALORI. SI PUÒ QUINDI PORRE:

$$t(x) = (x-1) \cdot (x+3) \cdot t_2(x)$$

AL MOMENTO, QUINDI, $f(x) = \frac{(x+1)(x-2) \cdot s_2(x)}{(x-1)(x+3) \cdot t_2(x)}$. PERCHÉ SIA TANGENTE ALL'ASSE DELLE ASCISSE PER $x = 2$, DEVE RISULTARE $f'(2) = 0$. CALCOLIAMO LA DERIVATA DEL RAPPORTO, NOTO CHE:

$$\text{NUMERATORE} = (x^2 - x - 2) \cdot s_2(x) \qquad D(\text{NUM}) = (2x-1) \cdot s_2(x) + (x+1)(x-2) \cdot s_2'(x)$$

$$\text{DENOMINAT.} = (x^2 + 2x - 3) \cdot t_2(x) \qquad D(\text{DEN}) = (2x+2) \cdot t_2(x) + (x-1)(x+3) \cdot t_2'(x)$$

$$f'(x) = \frac{\left[(2x-1) \cdot s_2 + (x+1)(x-2) \cdot s_2'\right] \cdot (x-1)(x+3) \cdot t_2(x) - (x+1)(x-2) \cdot s_2 \cdot \left[D(\text{DEN})\right]}{(x-1)^2 (x+3)^2 \cdot t_2^2(x)}$$

PONENDO $x = 2$: $f'(2) = \frac{\left[3 \cdot s_2 + 0\right] \cdot 5 t_2 - 0 \cdot \ldots}{25 t_2^2} = \frac{15 \cdot s_2(2) \cdot t_2(2)}{25 t_2^2(2)} = \frac{3 \cdot s_2(2)}{5 \cdot t_2(2)}$

IMPORRE $f'(2) = 0$ SIGNIFICA DIRE CHE $s_2(x)$ ABBIA UNO ZERO IN $x = 2$; AD ESEMPIO, QUINDI, $s_2(x) = x - 2$. SI RICAVA QUINDI CHE:

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-2)^2}{(x-1)(x+3)}$$

PONENDO ANCHE $t_2(x) = 1$ PER SEMPLICITÀ.

PER FAR SÌ CHE IL GRAFICO DELLA FUNZIONE PASSI PER $P(7; 10)$, È SUFFICIENTE PORRE $f(x) = k \cdot \frac{(x+1)(x-2)^2}{(x-1)(x+3)}$ E SOSTITUIRE LE COORDINATE DEL PUNTO, RICAVANDO $k = 3$.

RIASSUMENDO, SI OTTIENE: $f(x) = 3 \cdot \frac{(x+1)(x-2)^2}{(x-1)(x+3)}$

5. Si consideri la superficie sferica S di equazione $x^2+y^2+z^2-2x+6z=0$.
   - Dopo aver determinato le coordinate del centro e la misura del raggio, verificare che il piano π di equazione $3x-2y+6z+1=0$ e la superficie S sono secanti.
   - Determinare il raggio della circonferenza ottenuta intersecando π e S.

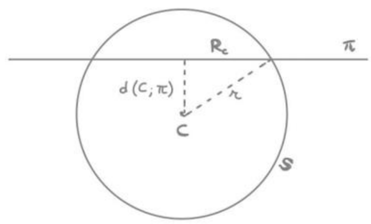
CENTRO SFERA : $C\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2};-\frac{c}{2}\right) \equiv \left(-\frac{-2}{2};-\frac{0}{2};-\frac{6}{2}\right) \equiv (1;0;-3)$

RAGGIO : $r=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2-d} = \sqrt{1^2+0^2+3^2-0} = \sqrt{10}$

DISTANZA CENTRO - PIANO : $d(C;\pi) = \frac{|3\cdot 1-2\cdot 0+6\cdot(-3)+1|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+6^2}} = \frac{14}{\sqrt{49}} = \frac{14}{7} = 2$

POICHÈ $d(C;\pi)<r$, IL PIANO π È SECANTE.

COME SI PUÒ VERIFICARE FACILMENTE (CFR. DISEGNO A LATO), IL RAGGIO DELLA CIRCONFERENZA DATA DALL'INTERSEZIONE DI SFERA E PIANO È UN CATETO DEL TR. RETTANGOLO FORMATO COL RAGGIO DELLA SFERA E CON LA DISTANZA DEL CENTRO DAL PIANO.



$R_c=\sqrt{r^2-d(C;\pi)^2} = \sqrt{10-4} = \sqrt{6}$

6. Un punto materiale si muove di moto rettilineo, secondo la legge oraria espressa, per $t\geq 0$, da $x(t)=\frac{1}{9}t^2\left(\frac{1}{3}t+2\right)$, dove $x(t)$ indica (in m) la posizione occupata dal punto all'istante t (in s). Si tratta di un moto uniformemente accelerato? Calcolare la velocità media nei primi 9 secondi di moto e determinare l'istante in cui il punto si muove a questa velocità.

VELOCITÀ : $v(t)=x'(t) = \frac{1}{27}\cdot 3t^2+\frac{2}{9}\cdot 2t = \frac{1}{9}t^2+\frac{4}{9}t$

ACCELERAZIONE : $a(t)=v'(t) = \frac{1}{9}\cdot 2t+\frac{4}{9} = \frac{2}{9}t+\frac{4}{9}$

POICHÉ $a(t)$ DIPENDE DAL TEMPO, IL MOTO NON È UNIFORMEMENTE ACCELERATO.

VELOCITÀ MEDIA : $v_m=\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(9)-x(0)}{9-0} = \frac{\frac{1}{9}\cdot 9^2\left(\frac{1}{3}\cdot 9+2\right)-\frac{1}{9}\cdot 0^2\left(\frac{1}{3}\cdot 0+2\right)}{9} = \boxed{5\ m/s}$

PER RISOLVERE L'ULTIMO QUESITO, È SUFFICIENTE PORRE $v(t)=v_m$:

$\frac{1}{9}t^2+\frac{4}{9}t=5 \qquad \frac{t^2+4t}{9}=\frac{45}{9} \qquad t^2+4t-45=0 \qquad (t+9)(t-5)=0$

$t = \begin{cases} -9s & : \text{FISICAM. NON ACC.} \\ \boxed{5s} & \end{cases}$

7. Una sfera di massa m urta centralmente a velocità v una seconda sfera, avente massa $3m$ ed inizialmente ferma.
   a. Stabilire le velocità delle due sfere dopo l'urto, nell'ipotesi che tale urto sia perfettamente elastico.
   b. Stabilire le velocità delle due sfere dopo l'urto, nell'ipotesi che esso sia completamente anelastico. Esprimere, in questo caso, il valore dell'energia dissipata.

(a)

URTO PERF. ELASTICO : SI CONSERVANO ENERGIA (CINETICA) E Q. DI MOTO

$$q_1 = q_2 \iff \begin{cases} m \cdot v = -m v_1 + 3m \cdot v_2 & (:m) \\ \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot 3m v_2^2 & \left(:\frac{1}{2}m\right) \end{cases}$$
$$K_1 = K_2 \iff$$

$$\begin{cases} v = -v_1 + 3v_2 \\ v^2 = v_1^2 + 3v_2^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 = 3v_2 - v \\ (3v_2 - v)^2 + 3v_2^2 - v^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{—} \\ 9v_2^2 - 6v \cdot v_2 + \cancel{v^2} + 3v_2^2 - \cancel{v^2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{—} \\ 12 v_2^2 - 6v \cdot v_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{—} \\ 6v_2 \cdot (2v_2 - v) = 0 \end{cases}$$

$v_2 = 0$ m/s : FISICAMENTE IMPOSSIBILE

$v_2 = \dfrac{v}{2}$

$$\begin{cases} v_2 = v/2 \\ v_1 = 3 \cdot \frac{v}{2} - v = v/2 \end{cases}$$

(b)

URTO PERF. ANELASTICO : SI CONSERVA SOLO LA Q. DI MOTO (ED I CORPI PROCEDONO UNITAMENTE).

$$q_1 = q_2 \iff m \cdot v = (m + 3m) \cdot v_2 \qquad \cancel{m} \cdot v = 4\cancel{m} \cdot v_2$$

$$v_2 = \frac{v}{4}$$

ENERGIA DISSIPATA : $-\Delta E = K_{in} - K_{fin} = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} \cdot (m + 3m) \cdot v_2^2 =$

$$= \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} \cdot 4m \cdot \left(\frac{v}{4}\right)^2 = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{8} m v^2$$

$$= \frac{3}{8} m v^2$$

8. Un campo magnetico, la cui intensità varia secondo la legge $B(t) = B_0(2 + \text{sen}(\omega t))$, dove t indica il tempo, attraversa perpendicolarmente un circuito quadrato di lato l. Detta R la resistenza presente nel circuito, determinare la forza elettromotrice e l'intensità di corrente indotte nel circuito all'istante t. Specificare le unità di misura di tutte le grandezze coinvolte.

PER LA LEGGE DI FARADAY-NEUMANN-LENZ : $fem_{ind.} = -\dfrac{\Delta \Phi_s(\vec{B})}{\Delta t}$

POICHÉ B È VARIABILE CONTINUAMENTE CON IL TEMPO, QUESTA CARATTERISTICA È MANTENUTA ANCHE DA $\Phi_s(\vec{B})$, PER CUI LA SUA "VARIAZIONE ISTANTANEA" È PARI ALLA SUA DERIVATA.

$$\Phi_s(\vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{S} = B(t) \cdot \ell^2 \cdot \cos(0°) = \ell^2 \cdot B_0 \cdot [2 + \sin(\omega t)]$$

$$fem = -\frac{d\,\Phi_s(\vec{B})}{dt} = -\Phi_s'(\vec{B}) = \ell^2 \cdot B_0 \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$$

APPLICANDO LA LEGGE DI OHM SI RICAVA FACILMENTE IL VALORE DELLA CORRENTE:

$$i(t) = \frac{fem}{R} = \frac{\ell^2 \cdot B_0 \cdot \omega}{R} \cdot \cos(\omega t)$$

LE UNITÀ DI MISURA DELLE GRANDEZZE COINVOLTE SONO:

$[B_0] = T$ $\quad$ $[\ell] = m$ $\quad$ $[fem] = V$

$[\omega] = rad/s$ $\quad$ $[S] = m^2$ $\quad$ $[i(t)] = A$

$[t] = s$ $\quad$ $[\Phi(\vec{B})] = Wb$ $\quad$ $[R] = \Omega$